

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A1. (α) Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης λ ενός διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$ με $x \neq 0$.

Μονάδες 3

(β) Αν $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$ διανύσματα με $\vec{a}, \vec{\beta} \parallel y'y$ και λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Η εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0), \lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει για τις διάφορες τιμές του λ όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(x_0, y_0)$.

(β) Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.

(γ) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \kappa \cdot x + \lambda \cdot y = 0$ με $\kappa \neq 0$ ή $\lambda \neq 0$, παριστάνει πάντα κύκλο.

(δ) Όλα τα σημεία της παραβολής $y^2 = 2\rho x$, $\rho < 0$, εκτός του $O(0, 0)$ έχουν θετική τετμημένη.

(ε) Η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εφαπτομένη με εξίσωση $\beta^2 \cdot x_1 \cdot x + \alpha^2 \cdot y_1 \cdot y = \alpha^2 \cdot \beta^2$

Μονάδες 10

A3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω ημιτελείς προτάσεις και δίπλα σε αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σχέση ή πρόταση που την συμπληρώνει σωστά.

1. Αν E' , E οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους 2α και M τυχαίο σημείο της έλλειψης, τότε

A. $(ME') - (ME) = 2\alpha$

B. $(ME') + (ME) = \alpha$

Γ. $(ME') + (ME) = 2\alpha$

Δ. $(ME') - (ME) = \alpha$

2. Έστω ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ με $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι

A. $\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{x - x_0}{\alpha}$

B. $y - y_0 = \beta(x - x_0)$

Γ. $\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$

Δ. $y - y_0 = -\frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία $A(0,8)$ και $B(4,0)$ του τριγώνου OAB όπου O η αρχή των αξόνων.

B1. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB και τις συντεταγμένες του μέσου της M .
Μονάδες 7

B2. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) της πλευράς AB και το σημείο Γ που η (ε) τέμνει τον $x'x$ άξονα.
Μονάδες 7

B3. Να βρείτε σημείο Δ του επιπέδου ώστε το τετράπλευρο $\Gamma M B \Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.
Μονάδες 6

B4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$.
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο κύκλος C_1 με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα 2 καθώς και η εξίσωση $C_2: x^2 + y^2 - 8x - 6y + \alpha = 0$ με $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση C_2 παριστάνει κύκλο όταν $\alpha < 25$

Μονάδες 3

(β) Να γράψετε για τον κύκλο με εξίσωση C_2

i) το κέντρο του.

ii) την ακτίνα του, συναρτήσει της παραμέτρου α .

Μονάδες 2

Γ2. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C_1 και να βρείτε για ποια τιμή του α οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

Μονάδες 5

Για $\alpha = 16$

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου και να αποδείξετε ότι η εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης στο κοινό τους σημείο είναι η $\varepsilon: 4x + 3y - 10 = 0$.

Μονάδες 8

Γ4. α) Να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα χαράζοντας τους δύο κύκλους C_1, C_2 και την ευθεία (ε)

Μονάδες 2

β) Αν η εφαπτομένη ε τέμνει τους άξονες $x'x, y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, να βρείτε το συνολικό εμβαδόν των περιοχών του επιπέδου που βρίσκονται εντός του τριγώνου OAB και εκτός του κύκλου C_1 , όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa - 3, -2)$ και $\vec{\beta} = (-1, 3)$ με $1 < \kappa < 7$

και η παραβολή $(C_1): y = (1 - 2\kappa) \cdot x^2$.

Δ1. Αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135^\circ$ να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

Μονάδες 8

Για $\kappa = 2$

Δ2. α) Να βρείτε την παράμετρο ρ της παραβολής C , την εστία της E και την εξίσωση της διευθετούσας της δ .

Μονάδες 3

β) Να χαράξετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της παραβολής C επισημαίνοντας την εστία E και τη διευθετούσα δ .

Μονάδες 2

Δ3. Αν είναι $\overline{AB} = \vec{\beta}$ με A, B σημεία της παραβολής, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B .

Μονάδες 7

Δ4. Αν Δ η προβολή του σημείου A στη διευθετούσα δ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, όπου E η εστία της παραβολής.

Μονάδες 5